数理解析研究所講究録
706巻 1989年 94-101

Krickeberg分解と$\mathcal{H}^1$

富山大・理　奥田　優 (Masaru Okuda)

L^1-有界なmartingale X に関するKrickeberg分解 $X=X^{(1)}-X^{(2)}$ $(X^{(1)}, X^{(2)}\geqq 0)$ は、よく知られている。特に、ある付帯条件をみたすとき、その分解は一意である。本稿では、クラス$\mathcal{H}^p\equiv\{X : \text{martingale} \mid X^*\equiv\sup_t|X_t|\in L^p\}$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ について、$X\in\mathcal{H}^p$ ならば、$X^{(1)}$ は $\mathcal{H}^p$ に属するか否か？ という問題を考察する。

§1. Krickeberg分解

$(\Omega, \mathcal{F}, P ; (\mathcal{F}_t))$ を通常の条件をみたす確率系とする。また、$(\mathcal{F}_t)$-martingale の right continuity を仮定する。

一般に、2つのprocess X, Y が

$$P(\{\omega\in\Omega \mid X_t(\omega)=Y_t(\omega) \quad \text{for } \forall t\geqq 0\})=1$$

のとき、X と Y は indistinguishable というが、Krickeberg分解での一意性は、この意味である。

定理 (K. Krickeberg (1956))

martingale $X=(X_t,\mathcal{F}_t)$ が L^1-有界 (i.e. $\sup_t E[|X_t|]<\infty$) であるための必要十分条件は，positive martingale $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ が存在して，$X=X^{(1)}-X^{(2)}$ と分解できることである。

特に，付帯条件

(I) $\sup_t E[|X_t|] = E[X_0^{(1)}] + E[X_0^{(2)}]$

をみたす分解は，一意に存在する。

(証明)

必要性は明らか。 十分性について述べよう。

$$X_t^{(1)} \equiv \lim_{n\to\infty} E[X_n^+ \mid \mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.}$$

$$X_t^{(2)} \equiv \lim_{n\to\infty} E[X_n^- \mid \mathcal{F}_t] \quad \text{a.s.}$$

とおくと，$X^{(1)}=(X_t^{(1)},\mathcal{F}_t)$，$X^{(2)}=(X_t^{(2)},\mathcal{F}_t)$ は，positiveで，単調収束定理により，$s<t$ ならば，$E[X_t^{(i)}\mid\mathcal{F}_s]=X_s^{(i)}$ $(i=1,2)$ となるから martingale となる。 また，明らかに，$X=X^{(1)}-X^{(2)}$ a.s.。 更に，等式(I)をみたす。 実際に，

$$\begin{aligned} E[X_0^{(1)}+X_0^{(2)}] &= E[\lim_{n\to\infty} E[X_n^+ + X_n^- \mid \mathcal{F}_0]] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[E[|X_n| \mid \mathcal{F}_0]] \quad (\because \text{単調収束定理}) \\ &= \sup_t E[|X_t|] \end{aligned}$$

.

最後に，分解の一意性を示す。

2つの positive martingale Y，Z が，条件をみたしていれば，

$$X_n^+ \leqslant Y_n\ ,\ X_n^- \leqslant Z_n$$

が成りたつので，$E[X_n^+ | \mathcal{F}_t] \leqslant Y_t$，$E[X_n^- | \mathcal{F}_t] \leqslant Z_t$，即ち，$X_t^{(1)} \leqslant Y_t$ a.s.，$X_t^{(2)} \leqslant Z_t$ a.s. がでる。

ところが仮定により，$E[X_0^{(1)}] = E[Y_0]$，$E[X_0^{(2)}] = E[Z_0]$，即ち，$E[X_t^{(1)}] = E[Y_t]$，$E[X_t^{(2)}] = E[Z_t]$ だから，結局，$X_t^{(1)} = Y_t$ a.s.，$X_t^{(2)} = Z_t$ a.s.．X の右連続性から，$X^{(1)}$ と Y，$X^{(2)}$ と Z は，indistinguishable． □

L^1-有界でない martingale の例を述べるのは簡単で，たとえば，1次元の Brownian Motion $B = (B_t, \mathcal{F}_t)$ がそうである。実際に，

$$E[|B_t|] = 2\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}$$

従って，

$$\sup_t E[|B_t|] = \infty\ .$$

§2．クラス $\mathcal{H}^p$ と Krickeberg 分解

$$X \in \mathcal{H}^p \equiv \{X : \text{martingale} \mid X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^p\}$$

$(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ ならば，明らかに L^1-有界だから，Krickeberg の定理により，$X = X^{(1)} - X^{(2)}$；$X^{(1)}, X^{(2)}$：positive martingales で，等式 (I) をみたす分解が一意に存在する。そこで，

$$(\mathrm{II}) \quad X \in \mathcal{H}^p \implies X^{(1)}, X^{(2)} \in \mathcal{H}^p$$

が成り立つだろうか？　結果は次の通り。

(i) $1 < p \leqq \infty$ のとき：　Doobの不等式により，(II)は成り立つ。

(ii) $p = 1$ 　　のとき：　(II)は成り立たない。

(i)については明らかだから，(ii)について少し説明する。もし，$p=1$ のとき(II)が成り立つとしたら，$\sup_t E[|X_\infty| \mid \mathcal{F}_t] \in L^1$ がでる。実際に，$X \in \mathcal{H}^1$ ならば一様可積分であるから，

$$\begin{aligned} X_t &= E[X_\infty \mid \mathcal{F}_t] \\ &= E[X_\infty^+ \mid \mathcal{F}_t] - E[X_\infty^- \mid \mathcal{F}_t] \quad . \end{aligned}$$

そこで，

$$X_t^{(1)} \equiv E[X_\infty^+ \mid \mathcal{F}_t] \quad , \quad X_t^{(2)} \equiv E[X_\infty^- \mid \mathcal{F}_t]$$

とおけば，

$X^{(1)}, X^{(2)}$ は，X のKrickeberg分解になっていることが容易に分かる。故に，

$$\begin{aligned} E[|X_\infty| \mid \mathcal{F}_t] &= E[X_\infty^+ \mid \mathcal{F}_t] + E[X_\infty^- \mid \mathcal{F}_t] \\ &= X_t^{(1)} + X_t^{(2)} \quad . \end{aligned}$$

従って，(II)が成り立てば，$\sup_t E[|X_\infty| \mid \mathcal{F}_t] \in L^1$.

そこで，$X \in \mathcal{H}^1$ であるが，$\sup_t E[|X_\infty| \mid \mathcal{F}_t] \notin L^1$ なる例を上げて，(II)が成り立たないことを示そう。必要なら連続なパラメーターになおすことができるから，

離散パラメーターの場合で反例を与えよう。つまり問題は、

$f \in \mathcal{H}^1$ であるが、$(g_n) \equiv (E[\,|f_\infty|\,|\,\mathcal{F}_n])\ \notin \mathcal{H}^1$

となる martingale $f = (f_n)$ の存在 である。

先ず、

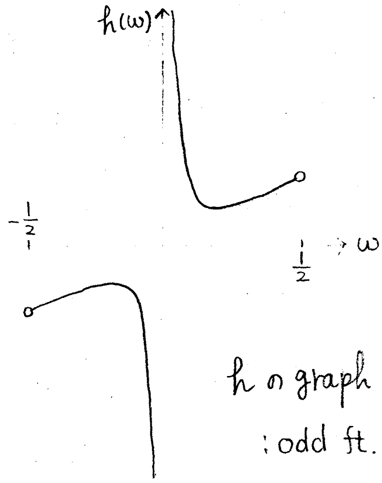
$$\Omega \equiv (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

$$P \equiv \text{Lebesgue measure on } \Omega$$

$$\mathcal{F}_n \equiv \sigma\left(\mathcal{B}\left((-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{n+1}] \cup [\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{2})\right), (-\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1})\right), \quad n \geqq 1$$

とし、

$$h(\omega) \equiv \frac{1}{\omega \log^2 |\omega|}, \quad \omega \in \Omega$$



h の graph

: odd ft.

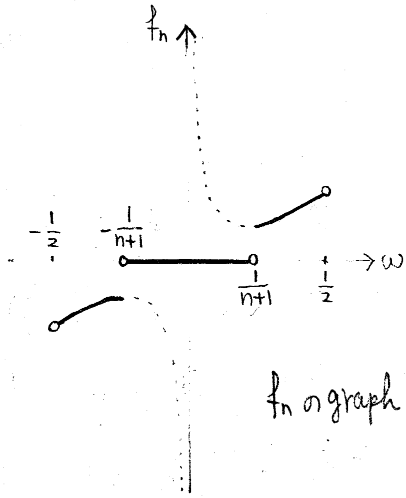
とおく。このとき、$|h|$ は even ft. だから、

$$\begin{aligned} E[|h|] &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} h(\omega)\, dP \\ &= 2\left[(-\log|\omega|)^{-1}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\log 2} < \infty \end{aligned}$$

次に、

$$f_n \equiv E[h \,|\, \mathcal{F}_n] \quad (n \geqq 1)$$

とすると、



f_n の graph

h が、continuous ft. であることと、

atom $(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ 上では odd ft.

であることに注意すれば、

$$f_n = h \quad \text{on } \Omega \setminus (-\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1})$$

$$f_n = 0 \quad \text{on } (-\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1})$$

従って,

$$f^* = |h| \in L^1 \quad \text{i.e.,} \quad f \in \mathcal{H}^1 .$$

他方, (g_n) に関しては, h が continuous ft. , $f_\infty = h$ に注意すれば,

$$g_n = |h| \quad \text{on } \Omega \setminus (-\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1}) .$$

atom $(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$ 上では, g_n の定義から,

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{n+1}{2}\int_{-\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n+1}} |h| \, dP \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{1}{n+1}} \frac{1}{\omega \log^2|\omega|} \, dP \qquad (\because |h| : \text{even ft.}) \\ &= (n+1) \times \left[(-\log|\omega|)^{-1} \right]_0^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{\log(n+1)} \qquad \text{on } (-\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n+1}) . \end{aligned}$$

ところで,

$$h(\tfrac{1}{n+1}) = \frac{n+1}{\log^2(n+1)} \quad \text{だから,} \quad h(\tfrac{1}{n+1}) < g_n \quad (n \geqq 2)$$

であるので, 各 n $(n \geqq 1)$ に対して,

$$g^* \geqq g_n = \frac{n+1}{\log(n+1)} \qquad \text{on } (\tfrac{1}{n+2}, \tfrac{1}{n+1}) .$$

従って,

$$g^* \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\log(n+1)} \cdot I_{(-\frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+2}) \cup (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})} .$$

故に,

$$E[g^*] \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{\log(n+1)} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+2)\log(n+1)}$$
$$= \infty$$

$$\therefore\ g^* \notin L^1 \quad \text{i.e.,} \quad g \notin \mathcal{H}^1 .$$

従って,このことから,$p=1$ のとき(II)は成り立たないことが分かる。以上のことをまとめると,次の結果が求まる。

命題

$X \in \mathcal{H}^1$ とする。このとき,

$$X^{(1)} \in \mathcal{H}^1 \iff E[|X_\infty| | \mathcal{F}_\cdot] \in \mathcal{H}^1 .$$

なお,BMO については,

$$X \in BMO \implies E[X_\infty^+ | \mathcal{F}_\cdot] \in BMO$$

が成立する。

参考文献

[1] R. J. Elliott, Stochastic Calculus and Applications, Springer 1982.

[2] N. Kazamaki, Krickeberg's decomposition for local martingales, Lecture Note in Math. 258, Springer 1972. 101 − 104.

[3] K. Krickeberg, Convergence of martingales with a directed index set, Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 313 − 337.